ZORRO

Profesor
Edson Curahua

GEOMETRÍA

GRUPO PITÁGORAS

CLASE 08: R. M. EN LA CIRCUN Y POLÍG REGULAR

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMA DE PTOLOMEO

TEOREMA DE CHADÚ

POLÍGONOS REGULARES

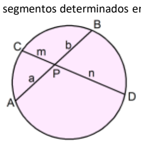
FÓRMULAS Y PROPIEDADES

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMA DE LAS CUERDAS

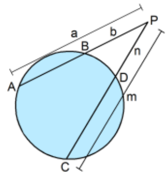
En una circunferencia si se trazan dos cuerdas secantes, el producto de las longitudes de los segmentos determinados en la primera cuerda es igual al producto de las longitudes de los segmentos determinados en la segunda cuerda.



$a.b = m.n$

TEOREMA DE LAS SECANTES

Si de un punto exterior a una circunferencia se trazan dos secantes, el producto de las longitudes de la primera secante con su parte externa es igual al producto de las longitudes de la segunda secante y su parte externa.

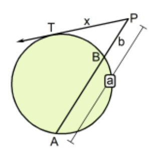


$a.b = m.n$

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMA DE LA TANGENTE Y LA SECANTE

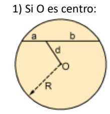
Si de un punto exterior a una circunferencia se traza una tangente y una secante, la longitud de la tangente es media proporcional entre las longitudes de la secante.



$x^2 = a.b$

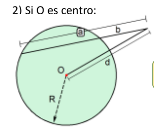
PROPIEDADES

1) Si O es centro:



$a.b = R^2 - d^2$

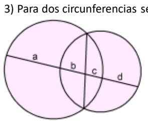
2) Si O es centro:



$a.b = d^2 - R^2$

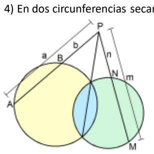
RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

3) Para dos circunferencias secantes:



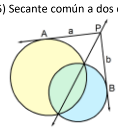
$a.c = b.d$

4) En dos circunferencias secantes:



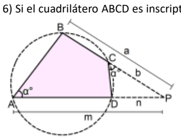
$a.b = m.n$

5) Secante común a dos circunferencias.



$a = b$

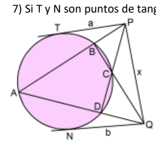
6) Si el cuadrilátero ABCD es inscriptible, entonces:



$a.b = m.n$

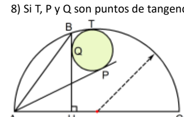
RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

7) Si T y N son puntos de tangencia.



$x^2 = a^2 + b^2$

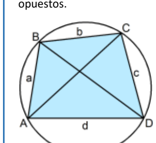
8) Si T, P y Q son puntos de tangencia.



$AB = AP$

TEOREMA DE PTOLOMEO

En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible en una circunferencia, se cumple que el producto de las longitudes de sus diagonales es igual a la suma de los productos de las longitudes de los lados opuestos.

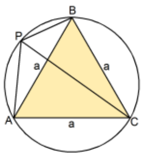


$AC.BD = a.c + b.d$

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMA DE CHADÚ

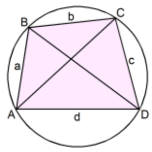
Sea P un punto cualquiera de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero, entonces la mayor distancia de P a uno de los vértices del triángulo, será igual a la suma de las distancias de P a los otros dos vértices.



$\mathrm{PC} = \mathrm{PA} + \mathrm{PB}$

TEOREMA DE VIETTE

En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible en una circunferencia, se cumple que la razón entre las longitudes de las diagonales es igual a la razón entre la suma de los productos de las longitudes de los lados que concurren en los extremos de dichas diagonales.

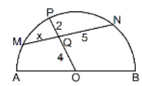


$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BD}} = \dfrac{a.d + b.c}{a.b + c.d}$

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

Ejemplo 01:

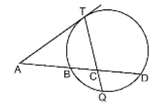
En el gráfico $\overline{AB}$ es diámetro, calcular el valor de x.



A) 3 B) 4 C) 2,5
D) 5 E) 6

Ejemplo 02:

En el gráfico mostrado T es punto de tangencia. Si AB=5, BC=3, TC=9 y CQ=4, calcular AT.

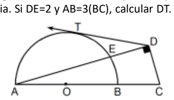


A) 5 B) 10 C) 15
D) 12 E) 20

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

Ejemplo 03:

En la figura $\overline{AB}$ es diámetro y T es punto de tangencia. Si DE=2 y AB=3(BC), calcular DT.



A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 4
D) 5 E) $3\sqrt{2}$

Ejemplo 04:

En una circunferencia de centro O y radio 15, se traza una cuerda $\overline{AB}$ y en ella se ubica el punto P tal que AP×PB=200. Calcular OP.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

Ejemplo 05:

Se tiene un cuadrado ABCD inscrito en una circunferencia, en el arco AD se ubica el punto E tal que: AE+EC=$4\sqrt{2}$. Calcular BE.

A) 2 B) 4 C) $2\sqrt{2}$
D) 6 E) 8

Ejemplo 06:

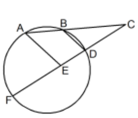
ABCD es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, con: AB=6, BC=8 y CD=DA=4. Calcular AC+BD.

A) 12 B) 15 C) $8\sqrt{2}$
D) $10\sqrt{2}$ E) 14

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

Ejemplo 07:

En la figura $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$, AB=4, BC=8 y CD=6. Calcular EF.



A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

Ejemplo 08:

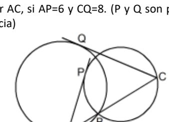
Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan la tangente $\overline{PT}$ y la secante $\overline{PAB}$ tal que $m\overset{\frown}{AB} = 120$ y AP= $\sqrt{3}$. Si el radio de la circunferencia mide 2, calcular PT.

A) 2,5 B) $2\sqrt{2}$ C) 4
D) 3 E) 6

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

Ejemplo 09:

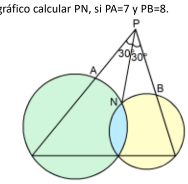
Calcular AC, si AP=6 y CQ=8. (P y Q son puntos de tangencia)



A) 7 B) 12 C) 10
D) 14 E) $7\sqrt{2}$

Ejemplo 10:

Del gráfico calcular PN, si PA=7 y PB=8.



A) $3\sqrt{5}$ B) 10 C) $5\sqrt{3}$
D) 7,5 E) $4\sqrt{3}$

POLÍGONOS REGULARES

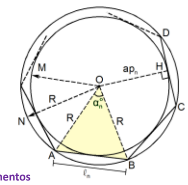
POLÍGONOS REGULARES

Se llama polígono regular al polígono convexo, equiángulo y equilátero a la vez.

Todo polígono regular se puede inscribir y circunscribir a circunferencias concéntricas, siendo el centro de éstas el centro del polígono regular.

Se llama **apotema** de un polígono regular al segmento que une el centro del polígono con el punto medio de cualquiera de sus lados.

Se llama **triángulo elemental** de un polígono regular al triángulo isósceles cuyo vértice coincide con el centro del polígono regular, sus lados congruentes son circunradios, su base es el lado del polígono regular, la altura relativa a la base es la apotema y el ángulo en el vértice es el ángulo central del polígono regular.



Elementos

1) Centro: O
2) Lado: $\overline{AB}$ ($AB=\ell_n$)
3) Apotema: $\overline{OH}$ ($OH=ap_n$)
4) Ángulo central: $\angle AOB$
5) Inradio: $\overline{OM}$
6) Circunradio: $\overline{ON}$ (ON=R)
7) Triángulo elemental: ΔAOB

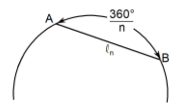
POLÍGONOS REGULARES

OBSERVACIONES

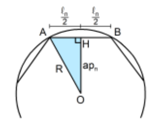
a) Para todo polígono regular, cálculo de la medida del ángulo central:

$$m\angle\text{Central:}\quad \alpha_n = \frac{360}{n}$$

b) $AB = \ell_n \quad \leftrightarrow \quad m\widehat{AB} = \frac{360}{n}$



CÁLCULO DE LA APOTEMA DE UN POLÍGONO REGULAR



En el triángulo AHO, por Pitágoras:

$$(ap_n)^2 + \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2 = R^2$$

$$\boxed{ap_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}}$$

POLÍGONOS REGULARES

Ejemplo 11:

Calcular la medida del lado de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio 1.

A) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ B) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ C) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$
D) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ E) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Ejemplo 12:

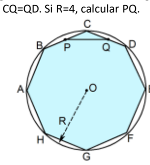
En un hexágono regular la diagonal mayor mide 6, calcular la medida de la menor diagonal.

A) 4 B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$
D) $3\sqrt{3}$ E) 6

POLÍGONOS REGULARES

Ejemplo 13:

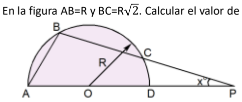
En la figura ABCDEFGH es un octógono regular, BP=PC y CQ=QD. Si R=4, calcular PQ.



A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{2}$

Ejemplo 14:

En la figura AB=R y BC=R$\sqrt{2}$. Calcular el valor de x.



A) 10 B) 15 C) 20
D) 22,5 E) 30

POLÍGONOS REGULARES

NOTAS:

Lado y apotema de un polígono regular en función del circunradio y del ángulo central:

$$\boxed{\ell_n = R\sqrt{2 - 2.\cos\alpha_n}}$$

$$\boxed{ap_n = \frac{R}{2}\sqrt{2 + 2.\cos\alpha_n}}$$

RECORDAR:

$$\boxed{\text{sen}18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}} \qquad \boxed{\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

APLICACIÓN:

1) Cálculo de ℓ_{12}:

$$\ell_{12} = R\sqrt{2 - 2.\cos\alpha_{12}}$$

$$\ell_{12} = R\sqrt{2 - 2.\cos 30°}$$

$$\ell_{12} = R\sqrt{2 - 2.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$\boxed{\therefore \ell_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

Análogamente:

$$ap_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + 2.\cos\alpha_{12}} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + 2.\cos 30°}$$

$$\boxed{ap_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

POLÍGONOS REGULARES

Cálculo de ℓ_{10}:

$$\ell_{10} = R\sqrt{2 - 2.\cos\alpha_{10}}$$

$$\ell_{10} = R\sqrt{2 - 2.\cos 36°}$$

$$\ell_{10} = R\sqrt{2 - 2.\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)}$$

$$\ell_{10} = R\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}}$$

$$\boxed{\therefore \ell_{10} = R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}$$

Cálculo de ap_{10}:

$$ap_{10} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + 2.\cos\alpha_{10}} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + 2.\cos 36°}$$

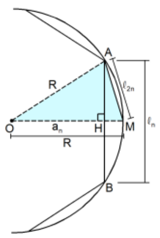
$$ap_{10} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + 2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)}$$

$$ap_{10} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}$$

$$\boxed{ap_{12} = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

POLÍGONOS REGULARES

CÁLCULO DEL LADO DEL POLÍGONO REGULAR DE DOBLE NÚMERO DE LADOS (ℓ_{2n})



En el triángulo AOM, por Euclides:

$$(\ell_{2n})^2 = R^2 + R^2 - 2R.ap_n$$

$$(\ell_{2n})^2 = R^2 + R^2 - 2R.\left(\frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}\right)$$

$$(\ell_{2n})^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}$$

$$\boxed{\ell_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}}}$$

POLÍGONOS REGULARES

APLICACIÓN:

Cálculo de ℓ_{24}:

Recordamos que: $\ell_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Luego, en la fórmula:

$$\ell_{24} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_{12}^2}}$$

$$\ell_{24} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \left(R\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^2}}$$

$$\boxed{\therefore \ell_{24} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

NOTA:

$$\ell_4 = \ell_{2^2} = R\sqrt{2}$$

$$\ell_8 = \ell_{2^3} = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\ell_{16} = \ell_{2^4} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$\ell_{32} = \ell_{2^5} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

$$\ell_{64} = \ell_{2^6} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$$

PRINCIPALES POLÍGONOS REGULARES

PRINCIPALES POLÍGONOS REGULARES

$\ell_n = f_{(R)}$	$ap_n = f_{(R)}$	α_n
$\ell_3 = R\sqrt{3}$	$ap_3 = \frac{R}{2}$	120
$\ell_4 = R\sqrt{2}$	$ap_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	90
$\ell_6 = R$	$ap_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$	60
$\ell_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$	$ap_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$	45
$\ell_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$	$ap_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$	30

PRINCIPALES POLÍGONOS REGULARES

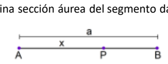
PRINCIPALES POLÍGONOS REGULARES

$\ell_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	$ap_5 = R\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$	72
$\ell_{10} = R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$	$ap_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	36

POLÍGONOS REGULARES

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN

Para dividir un segmento en media y extrema razón se ubica un punto en el segmento de modo que la parte mayor determinada sea media proporcional entre la parte menor y el segmento dado. De este modo a la parte mayor se le denomina sección áurea del segmento dado.



En el gráfico P divide a $\overline{AB}$, de modo que:

$$\frac{PB}{AP} = \frac{AP}{AB} \quad \text{o} \quad \boxed{AP^2 = (PB)(AB)}$$

Luego decimos que $\overline{AP}$ es la sección áurea de $\overline{AB}$.

NOTA:

$$x^2 = (a - x)(a)$$
(ecuación característica)

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

Resolviendo:

$$\boxed{x = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}$$

POLÍGONOS REGULARES

TEOREMAS

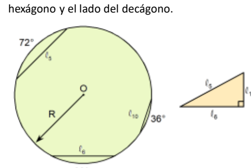
01. El lado del decágono regular inscrito en una circunferencia es congruente con la sección áurea del radio.

$$\boxed{\ell_{10} = R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}$$

02. El lado de un pentágono regular es congruente con la sección áurea de su diagonal.

$$\boxed{\ell_5 = d_5\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}$$

03. El triángulo formado con un lado de un pentágono regular, un lado de un hexágono regular y un lado de un decágono regular que tienen el mismo circunradio es siempre un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el lado del pentágono, es decir los catetos son el lado del hexágono y el lado del decágono.



POLÍGONOS REGULARES

Ejemplo 15:

En el triángulo ABC los ángulos A y C miden 19 y 26 respectivamente. Al trazar las alturas $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$, se pide calcular MN, sabiendo además que AC=8.

A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ C) $4\sqrt{2}$
D) $\sqrt{5}-1$ E) $2-\sqrt{3}$

Ejemplo 16:

Se tiene un heptágono regular ABCDEFG, tal que: $\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=1$. Calcular AB.

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) $\frac{3}{2}$ E) 7

EJEMPLOS

Ejemplo 17:

En una circunferencia de radio R se traza una cuerda $\overline{AB}$ que subtiende un arco de 150°. Hallar la longitud de la cuerda.

A) $\frac{R}{2}(\sqrt{3}+1)$ B) $\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ C) $\frac{2R\sqrt{2}}{3}$
D) $\frac{3R}{2}$ E) $R\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Ejemplo 18:

ABCDEF es un hexágono regular circunscrito a una circunferencia tangente a $\overline{BC}$ en Q. Si $\overline{AQ}$ interseca a la circunferencia en M y el radio de la circunferencia mide 3, calcular AM.

A) $\frac{\sqrt{21}}{21}$ B) $\frac{\sqrt{7}}{6}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{7}$
D) $\frac{\sqrt{21}}{14}$ E) $\frac{\sqrt{21}}{7}$

EJEMPLOS

Ejemplo 19:

Calcular la longitud del lado de un polígono regular de 16 lados inscrito en una circunferencia de radio 1.

A) $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
B) $\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}$
C) $2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
D) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$
E) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{2}$

Ejemplo 20:

Un triángulo regular ABC está inscrito en una circunferencia cuyo radio mide $2\sqrt{7}$. Calcular FM, siendo F el punto medio del arco AB y M el punto medio de $\overline{AC}$.

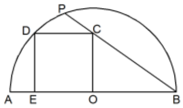
A) 14 B) 7 C) 21
D) $2\sqrt{7}$ E) 4

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PROBLEMAS PROPUESTOS

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

01. En el gráfico: EDCO es un cuadrado y O es centro. Calcular CP, si ED=3.



A) 2 B) 1 C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}$ E) 1,5

Resolución:

Rpta. D

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

02. Calcular la medida del radio de una circunferencia, si desde un punto exterior P se trazan las secantes $\overline{PAB}$ y $\overline{PCD}$ tal que PB=10, PA=6, PC=4 y $m\overset{\frown}{CD}=60$.

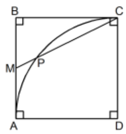
A) 10 B) 11 C) 12
D) 16 E) 18

Resolución:

Rpta. B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

03. En el gráfico D es centro. Si AM=MB y CD=$2\sqrt{5}$, calcular MP.



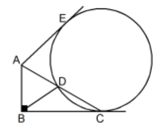
A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}$
D) 1 E) 2

Resolución:

Rpta. D

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

04. Calcular AE, sabiendo que BA=BD=4, E y C son puntos de tangencia.



A) $\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{2}$

Resolución:

Rpta. B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

05. En el paralelogramo ABCD la semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$ interseca a $\overline{AB}$ en P y es tangente a $\overline{BC}$ en el punto T. Si PB=1 y BT=2, calcular TC.

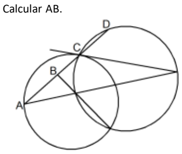
A) $4\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{7}$
D) 5 E) 4,5

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

06. En la figura C es punto de tangencia, BC=a y CD=b. Calcular AB.



A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{a^2+b^2}$ C) $\sqrt{a(a+b)}$
D) $\sqrt{b(a+b)}$ E) $\sqrt{a(2a+b)}$

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

07. En una circunferencia de radio R y centro O se tiene una cuerda $\overline{AB}$, AB=2, en dicha cuerda se ubica el punto M tal que OM=1. Calcular R, si M divide en media y extrema razón a $\overline{AB}$.

A) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ B) $\sqrt{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ C) $\sqrt{4\sqrt{5}-7}$
D) $\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ E) $\sqrt{3\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

08. Calcular el perímetro de un heptágono regular ABCDEFG, si $\frac{1}{AE}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{5}$.

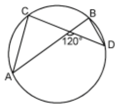
A) 34 B) 35 C) 36
D) 37 E) 38 (UNI 2014-1)

Resolución:

Rpta. B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

09. Calcular el radio de la circunferencia mostrada, si AC=5 y BD=3.



A) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$ B) $\frac{5\sqrt{3}}{5}$ C) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

10. En el cuadrilátero ABCD se cumple que AB=BC=CD=a y m∠ABC=m∠ACD=90. Calcular la medida del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

A) $\frac{a}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ B) $\frac{a}{4}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ C) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$
D) $\frac{a}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ E) $\frac{a}{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Resolución:

Rpta. D

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

11. Se colocan ocho monedas de igual radio, tangentes dos a dos, tangencialmente alrededor de una moneda de mayor radio, entonces la relación entre el radio de la moneda mayor y el radio de la moneda menor es:

A) $\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-2$ B) $\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-1$ C) $\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-\frac{1}{2}$
D) $\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-\frac{1}{4}$ E) $\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-\frac{1}{8}$ (UNI 2013-2)

Resolución:

Rpta. B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

12. Se tiene un dodecágono regular cuyo lado mide $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Calcular el perímetro del polígono cuyos vértices son los puntos medios de los lados del dodecágono.

A) 6 B) $6\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{2-\sqrt{3}}$
D) $12\sqrt{3}$ E) 12

Resolución:

Rpta. E

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

13. Se desea diseñar un mosaico compuesto por tres mayólicas que deben tener la forma de polígonos regulares, de tal manera que dos mayólicas sean congruentes con un vértice común. Los lados de cada mayólica deben tener una longitud de 1 m y la suma de las medidas de los ángulos interiores de las mayólicas que tienen el vértice común es 360°. Calcule el mayor perímetro (en m) que debe tener el mosaico obtenido.

A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24 (UNI 2020-1)

Resolución:

Rpta. B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

14. En el arco BC de una circunferencia circunscrita a un octógono regular ABCDEFGH, se ubica el punto P, tal que PC=1 m y PE=$4\sqrt{2}$ m. Calcule la longitud del radio de la circunferencia (en m).

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (UNI 2019-2)

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

15. En una circunferencia de radio R se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D tales que AB=R$\sqrt{3}$, BD=R$\sqrt{2}$ y CD=R. Calcular AC.

A) R$\sqrt{2-\sqrt{3}}$ B) R(2+$\sqrt{2}$) C) R$\sqrt{2+\sqrt{2}}$
D) R$\sqrt{2+\sqrt{3}}$ E) R($\sqrt{5}$ +1)

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

16. En el triángulo ABC una circunferencia es tangente a $\overline{AB}$ y a $\overline{BC}$ en los puntos T y P respectivamente, además es secante a $\overline{AC}$ en los puntos Q y R (Q ∈ $\overline{RC}$). Si AQ=QC=3, calcular $(AT)^2$+$(PC)^2$.

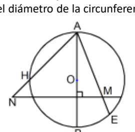
A) 36 B) 12$\sqrt{3}$ C) 18$\sqrt{2}$
D) 18 E) 27

Resolución:

Rpta. D

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

17. En la figura O es centro de la circunferencia. Si NH=11, AM×AE=900 y m∠ANM=45, entonces la longitud del diámetro de la circunferencia es:



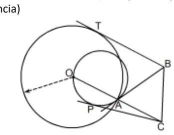
A) 5$\sqrt{2}$ B) 10$\sqrt{2}$ C) 15$\sqrt{2}$
D) 20$\sqrt{2}$ E) 25$\sqrt{2}$ (UNI 2014-1)

Resolución:

Rpta. E

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

18. Según la figura el triángulo ABC es equilátero. Siendo TB=a calcular CP. (A, P y T son puntos de tangencia)



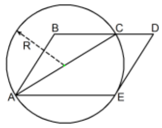
A) a B) 2a C) a$\sqrt{2}$
D) a$\sqrt{3}$ E) 2a$\sqrt{2}$

Resolución:

Rpta. A

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

19. Calcular R, si ABDE es un paralelogramo BC=a y CD=b. (E es punto de tangencia)



A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{(b+a)b}$ C) $\sqrt{a(a+b)}$
D) $\sqrt{(2b+a)b}$ E) $\frac{1}{2}\sqrt{(2b+a)(a+b)}$

Resolución:

Rpta. E

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

20. En una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se traza la cuerda $\overline{CD}$ que interseca a $\overline{AB}$. Si las distancias de A y B a $\overline{CD}$ se diferencian en 1 y $m\widehat{AC}-m\widehat{DB}=36$, calcular AB.

A) $\sqrt{5}-1$ B) $\sqrt{5}+1$ C) $\sqrt{5}+2$
D) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{5}+2}{2}$

Resolución:

Rpta. B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

21. En un cuadrilátero ABCD se cumple que m∠ABC=m∠ADC=72, m∠BCD=90 y AB=BC=$\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Si F es un punto de $\overline{AD}$ tal que m∠ABF=18, calcular BF.

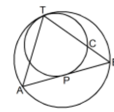
A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{5}-1$ C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{5}+1$ E) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$

Resolución:

Rpta. D

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

22. En la figura adjunta P y T son puntos de tangencia, AP=2(BC) y $\overline{TC}$ es la sección áurea de $\overline{TB}$. Si TC=2, calcular AT.



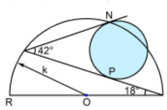
A) $\sqrt{5}+1$ B) $4(\sqrt{5}-1)$ C) $3+2\sqrt{5}$
D) 4 E) $2\sqrt{5}$

Resolución:

Rpta. D

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

23. En la figura O es centro de la semicircunferencia. Además, P y N son puntos de tangencia. Calcule PR.



A) $\frac{k}{2}\sqrt{10-\sqrt{20}}$ B) $\frac{k}{3}\sqrt{10-\sqrt{20}}$
C) $\frac{k}{2}\sqrt{15-\sqrt{20}}$ D) $\frac{k}{4}\sqrt{15-\sqrt{20}}$
E) $\frac{k}{2}\sqrt{10+\sqrt{20}}$ (UNI 2019-2)

Resolución:

Rpta. A

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

24. En un cuadrilátero ABCD: m∠BAC=3(m∠ACD), m∠ABC=m∠ADC=90. Si $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{F\}$, FC=10 m y BD=9 m, calcule AF (en metros).

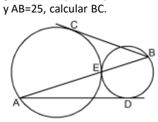
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5 (UNI 2013-1)

Resolución:

Rpta. B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

25. En el gráfico C, D y E son puntos de tangencia. Si AD=24 y AB=25, calcular BC.



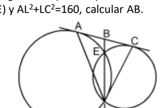
A) 23 B) 21 C) 14
D) 7 E) 28

Resolución:

Rpta. D

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

26. En el gráfico A y C son puntos de tangencia. Si BC=2(BE) y $AL^2+LC^2=160$, calcular AB.



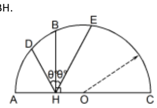
A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

27. En el gráfico $\overline{AC}$ es diámetro. Si (DH).(HE)=28, calcular BH.



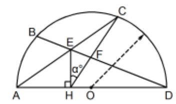
A) 6 B) $2\sqrt{7}$ C) $2\sqrt{6}$
D) $2\sqrt{5}$ E) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

Resolución:

Rpta. B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

28. En la figura $\overline{AD}$ es diámetro y AE=EC. Si BE=3 y EF=2, calcular el valor de α.



A) 53 B) 37 C) 36
D) 45 E) 30

Resolución:

Rpta. E

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

29. En los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubican los puntos Q y P tales que BQ=QC y $\overline{PC}$ es congruente con la sección áurea de $\overline{AP}$. Calcular PQ, si (AP)(PC)=72 y m∠QPA=m∠BAC.

A) 1 B) 2 C) 3
D) $6\sqrt{2}$ E) 6

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

30. En un triángulo rectángulo isósceles ABC, recto en B, con centro en A y C y radios $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ respectivamente se dibujan dos arcos de circunferencia que intersecan a la hipotenusa en los puntos P y Q. Calcular PQ, si AB=$2+\sqrt{2}$.

A) 2 B) $2+\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$
D) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ E) $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Resolución:

Rpta. A

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

31. En un triángulo ABC, su incentro es I y su circuncentro O. Si m∠AIO=90, AB=c, AC=b y BC=a, indique la relación correcta:

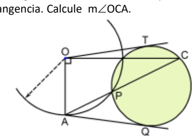
A) 2c = b+a B) $c^2 = a^2 + b^2$ C) $a = \sqrt{cb}$
D) 2a = b+c E) $c = \sqrt{ab}$

Resolución:

Rpta. D

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

32. En el gráfico, TO=AQ, además Q y T son puntos de tangencia. Calcule m∠OCA.



A) 15 B) 16 C) 37/2
D) 45/2 E) 53/2

Resolución:

Rpta. E

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

33. Se tiene un triángulo equilátero ABC inscrito en una circunferencia cuyo radio mide 2. Calcular la distancia del punto medio del arco BC hacia el punto medio del lado AC.

A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{7}$
D) 2 E) 3

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

34. ABCDEFGH es un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio R. Halle la distancia de F a $\overline{AD}$.

A) $\frac{R}{2}(\sqrt{2}+1)$
B) $2R\sqrt{2}$
C) $\frac{R}{2}\sqrt{2(\sqrt{2}+2)}$
D) $\frac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
E) $\frac{3R}{4}$

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

35. En la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero ABC se ubica el punto P, tal que PB=3 y PC=4. Calcule AB. (Considere P en el menor arco BC)

A) $\sqrt{37}$ B) 6 C) $2\sqrt{5}$
D) $\sqrt{35}$ E) $2\sqrt{7}$

Resolución:

Rpta. A

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

36. Se tiene dos circunferencias tangentes interiores en T y se traza la cuerda $\overline{AC}$ en la circunferencia mayor, la cual es tangente a la menor en P. La prolongación de $\overline{TP}$ interseca a la mayor en B. Si el arco ATC mide 120, AT=6 y TC=2, calcular TB.

A) 4 B) 6 C) 8
D) 12 E) 10

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

37. En un nonágono regular ABCDEFGHI, se cumple IG+AB=2. Calcule ID

A) 3 B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{2}$

Resolución:

Rpta. B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

38. Sabiendo que el lado del dodecágono regular inscrito en una circunferencia mide: $\sqrt{2-\sqrt{3}}$, calcular la longitud del lado del polígono regular de 24 lados inscrito en la misma circunferencia.

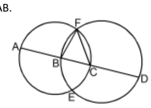
A) $\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$
B) $\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}$
C) $\sqrt{2-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$
D) $\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}$
E) $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

Resolución:

Rpta. E

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

39. En la figura CD=6, 3(BF)=2(FC) y $m\widehat{BE} = m\widehat{EC}$. Calcular AB.



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución:

Rpta. D

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

40. Se tiene un trapecio inscrito en una circunferencia de radio R (el centro está en el interior del trapecio). Se sabe que R=$\sqrt{2}$ y las bases miden $\sqrt{2}$ y $\sqrt{6}$. Calcular la diagonal del trapecio.

A) $\sqrt{3}-1$ B) $\sqrt{3}+1$ C) $2\sqrt{3}-1$
D) $2\sqrt{3}+1$ E) $\sqrt{3}+2$

Resolución:

Rpta. B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

MUCHAS GRACIAS